УДК 512.541

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ КАК АРТИНОВЫ ИЛИ НЕТЕРОВЫ МОДУЛИ НАД КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ. Ч. 2

П.А. Крылов*, Е.И. Подберезина

*Томский государственный университет
Томский политехнический университет
E-mail: hggh45de@mail2000.ru

Описаны абелевы группы A и B такие, что группа гомоморфизмов Hom(A,B) является артиновым модулем над кольцом эндоморфизмов группы B. Описание групп A и B, для которых группа Hom(A,B) является артиновым модулем над кольцом эндоморфизмов группы A, сведена к случаю, когда группа A не имеет кручения, а группа B – либо квазициклическая группа, либо делимая группа без кручения. Охарактеризованы абелевы группы A и B, для которых группа Hom(A,B) есть нётеров модуль над кольцом E(A) или E(B). Исследование произвольной абелевой группы с нётеровым слева кольцом эндоморфизмов сведено к исследованию группы без кручения с нётеровым слева кольцом эндоморфизмов. Исследование группы с нётеровым справа кольцом эндоморфизмов осталось незавершённым. Описаны сепарабельные абелевы группы без кручения с нётеровыми слева или справа кольцами эндоморфизмов.

Полностью решена проблема описания абелевых групп A и B таких, что левый $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов (теорема 3 [1. С. 178]). Ключом к решению этой проблемы служат следующие два предложения.

Предложение 1. Предположим, что A и B – такие группы, что $\mathrm{Hom}(A,B)$ – артинов $E(B)$-модуль или артинов $E(A)$-модуль. Тогда для некоторого $m\in N$ имеет место разложение

$$\mathrm{Hom}(A,B)=m\mathrm{Hom}(A,B)\oplus K,$$

где $m\mathrm{Hom}(A,B)$ – делимая группа, K – ограниченная группа.

Предложение 2. Если $m\mathrm{Hom}(A,B)$ – делимая группа для некоторого $m\in N$, то и mS – делимая группа.

Эти предложения раскрывают строение следа группы A в группе B при условии, что модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов. Нужно подчеркнуть, что это относится как к $E(B)$-модулю $\mathrm{Hom}(A,B)$, так и к $E(A)$-модулю $\mathrm{Hom}(A,B)$. Дело в том, что в основе доказательства предложений 1 и 2 лежит рассмотрение цепи $E(B)$-подмодулей модуля $\mathrm{Hom}(A,B)$, которая является также и цепью $E(A)$-подмодулей этого модуля. Поэтому эти предложения важны и для изучения $\mathrm{Hom}(A,B)$ как артинова модуля над кольцом $E(A)$.

Предложения 3, 4 и лемма 2 уточняют строение следа S и коследа $\overline{A}$ в предположении, что $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов.

Предложение 3. Если $\mathrm{Hom}(A,B)$ – артинов $E(B)$-модуль или $E(A)$-модуль, то число делимых p-компонент следа S конечно.

Лемма 2. Подмодуль $\mathrm{Hom}(Z(p^\infty),D_p)$ $E(B)$-модуля $\mathrm{Hom}(A,B)$ не является артиновым.

Предложение 4. Если $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов, то

$$\overline{A}=H\oplus\sum_m{}^{\oplus}Q\oplus G,$$

где H – конечная группа, G – редуцированная группа без кручения и $m\in N$.

Предложение 5. Пусть $\mathrm{Hom}(A,B)$ является артиновым $E(B)$-модулем. Тогда для всякого p, относящегося к группе C, редуцированная p-компонента группы B ограничена. Группа $B=d(B)\oplus E\oplus V$, где $d(B)$ – делимая часть группы B; E – ограниченная группа и всякое p, относящееся к E, относится и к C; V – некоторая группа, причём $\mathrm{Hom}(A,B)=0$. След S – артинов $E(B)$-модуль.

Предложение 5 интересно тем, что в нём полностью описано строение группы B такой, что $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов. Кроме того, это предложение утверждает, что след группы A в группе B является в этом случае артиновым $E(B)$-модулем. Последний факт использован в доказательстве достаточности теоремы 3.

Теорема 3. Пусть A и B – некоторые группы. Левый $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов тогда и только тогда, когда

$$S = D \oplus \sum_{\eta}{}^{\oplus} Q \oplus C,$$

где D – делимая периодическая группа с конечным числом p-компонент; C – ограниченная группа; η – некоторый кардинал, а

$$\overline{A} = H \oplus \sum_{m}{}^{\oplus} Q \oplus G,$$

где H – конечная группа, G – редуцированная группа без кручения; $m \in N$ и для всякого p, относящегося к группе C, редуцированная p-компонента группы B ограничена.

Причём:

- если $D \neq 0$, то $\overline{A}=H \oplus G$, $r(G)<\infty$ и $r(G)=r_p(G)$ для всех p, относящихся к группе D;
- если $D=0$, но $\sum_m^{\oplus} Q \neq 0$, то $r(G)<\infty$;
- если S – ограниченная группа, то есть $S=C$, то $\overline{A}=H \oplus G$ и для любого p, относящегося к S, $r_p(G)<\infty$.

Теорема 3 относится к основным результатам исследования группы $\mathrm{Hom}(A,B)$ как артинова $E(B)$-модуля. Она даёт полное описание абелевых групп A и B таких, что $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов. Понятно, что предложения, о которых выше шла речь, являются существенной частью доказательства её необходимости. Как доказательство утверждений теоремы 3 о ранге (p-ранге) редуцированной части без кручения группы $\overline{A}$, так и доказательство её достаточности основано на построении индуцированных точных последовательностей $E(B)$-модулей и теореме 1. В процессе доказательства необходимости теоремы 3 установлено, в частности, что $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(Q,D_p)$ не артинов.

Приведём несколько следствий теоремы 3 и записанных выше предложений.

Следствие 1. Пусть A и B – группы, причём B – редуцированная группа. Левый $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов тогда и только тогда, когда S – ограниченная группа и для всякого p, относящегося к S, p-компонента группы B ограничена, а группа $\overline{A}=H \oplus G$, где H – конечная группа, G – редуцированная группа без кручения и для каждого p, относящегося к S, $r_p(G)<\infty$.

Следствие 2. Пусть A и B – периодические группы. Левый $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов в том и только в том случае, если S – ограниченная группа, причём для любого p, относящегося к S, редуцированная p-компонента группы B ограничена, а $\overline{A}$ – конечная группа.

Следствие 3. Если A и B – группы без кручения, $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов тогда и только тогда, когда S – делимая группа, а A – группа конечного ранга.

Укажем более точные соотношения между следом S, коследом $\overline{A}$ и группами A и B в случае, когда $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов. По предложению 5 имеем равенство $B=d(B) \oplus E \oplus V$, где $d(B)$ – делимая часть группы B; E – ограниченная группа и всякое p, относящееся к E, относится и к C, причём $\mathrm{Hom}(A,V)=0$. Из доказательства этого предложения [1. С. 177] заключаем, что $S=d(B) \oplus E[k]$, если $\overline{A} \neq H$ и $S=d(B)[t] \oplus E[k]$, если $\overline{A}=H$ для каких-то k, $t \in N$. В первом случае, $d(B)=D \oplus \sum_\eta^{\oplus} Q$, $C=E[k]$, во втором – $C=S=d(B)[t] \oplus E[k]$. Можно также привести некоторые общие условия, при которых $S=d(B) \oplus E$ или $S=E$, то есть след выделяется прямым слагаемым в группе B.

Следствие 4. 1) Пусть A и B – такие группы, как в следствии 1. Тогда имеем $B=E \oplus W$ и $S=E[k]$ для некоторого $k \in N$.

2) Если A и B – группы из следствия 2, то $A=\overline{A} \oplus V$ для какой-то группы V, причём $\mathrm{Hom}(A,V)=0$, а $\overline{A}$ – конечная группа.

Следствие 5. Пусть A – группа без кручения, B – периодическая группа. Левый $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов тогда и только тогда, когда $S=D \oplus C$, где D – делимая периодическая группа с конечным числом p-компонент, C – ограниченная группа, а $\overline{A}=\sum_m^{\oplus} Q \oplus G$, где $m \in N$, G – редуцированная группа без кручения и для любого p, относящегося к группе C, редуцированная p-компонента группы B ограничена, причём: а) если $D \neq 0$, то $\overline{A}=G$, $r(G)<\infty$ и $r(G)=r_p(G)$ для всех p, относящихся к D; б) если $D=0$, то есть если $S=C$, то $\overline{A}=G$ и для любого p, относящегося к группе S, $r_p(G)<\infty$.

Следствие 6. Пусть A – произвольная, а B – делимая группы. $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов тогда и только тогда, когда

$$S=D \oplus \sum_\eta{}^{\oplus} Q,$$

где D – делимая периодическая группа с конечным числом p-компонент, η – некоторый кардинал, а

$$\overline{A}=H \oplus \sum_m{}^{\oplus} Q \oplus G,$$

где H – конечная группа, $m \in N$, G – редуцированная группа без кручения, причём: а) если $D \neq 0$, то $\overline{A}=H \oplus G$, $r(G)<\infty$ и $r(G)=r_p(G)$ для всех p, относящихся к группе D; б) если $D=0$, то есть если след S – делимая группа без кручения, то группа $\overline{A}$ тоже не имеет кручения и $r(G)<\infty$.

Следствие 7. Пусть A и B – делимые группы. $E(B)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов тогда и только тогда, когда группы $\overline{A}$ и S являются группами без кручения, причём ранг группы $\overline{A}$ конечен.

Проблема описания групп A и B, для которых $\mathrm{Hom}(A,B)$ – артинов $E(A)$-модуль, сведена по существу к случаю, когда группа A не имеет кручения, а группа B является одной из следующих групп: $Z(p)$, $Z(p^\infty)$, Q (теорема 20 [2. С. 197]).

Договоримся через D_p (соответственно R_p) обозначать делимую (соответственно редуцированную) p-компоненту группы A. Затем T_p – вся p-компонента группы A, то есть $T_p=D_p \oplus R_p$.

Пусть группы A и B таковы, что правый $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов. Из предложений 1–3 следует, что в таком случае след S есть прямая сумма делимой группы и ограниченной группы. Поскольку $\mathrm{Hom}(A,W)$ есть подмодуль $E(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(A,B)$ для любой подгруппы $W \subseteq B$, то понятно, что группа S не может иметь бесконечных прямых разложений. Таким образом, если $\mathrm{Hom}(A,B)$ – ар-

тинов $E(A)$-модуль, то след S является прямой суммой делимой группы конечного ранга и конечной группы. Пример модуля $\mathrm{Hom}(Z,Z(p^\infty))$ показывает, что при этом в следе действительно может присутствовать группа $Z(p^\infty)$.

Что касается строения коследа группы B в группе A для артинова $E(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(A,B)$, то оно получено в предложениях 6 и 7.

Предложение 6. Если $D_p\neq 0$ и группа B содержит подгруппу $Z(p^\infty)$, то $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ не является артиновым.

Предложение 7. Если $\mathrm{Hom}(A,B)$ – артинов $E(A)$-модуль, то редуцированная p-компонента группы A ограничена для любого p, относящегося к группе B, и таких p-компонент конечное число.

Эти предложения вместе с выводом о строении следа группы A в группе B представляют собой доказательство необходимости теоремы 4, которая относится к основным результатам исследования группы $\mathrm{Hom}(A,B)$ как артинова модуля над кольцом $E(A)$.

Обозначим буквами T и D соответственно периодическую и делимую части группы A.

Теорема 4. Пусть A и B – некоторые группы. $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов тогда и только тогда, когда след S равен прямой сумме конечной группы и делимой группы конечного ранга; для каждого p, относящегося к группе B, редуцированная p-компонента группы A ограничена, группы A и B не содержат одновременно групп $Z(p^\infty)$; $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A/T,Z(p))$ артинов, если p относится к следу S, $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A/T,Z(p^\infty))$ артинов, если в следе S содержится группа $Z(p^\infty)$ и, наконец, $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A/(T+D),Q)$ артинов, если в следе S содержится группа Q.

Доказательство достаточности теоремы 4 опирается на использование индуцированных точных последовательностей $E(A)$-модулей, теорему 1 и предложение 8.

Предложение 8. Допустим, что редуцированная p-компонента группы А ограничена. Тогда $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(T_p,Z(p^k))$ артинов для всякого $k\in N$, где T_p – p-компонента группы A.

В [2. С. 194–195] рассмотрены примеры. Напомним, что η – некоторый кардинал.

Примеры 1. 1) Пусть $A=\sum_\eta^\oplus Z(p)$ или $A=\sum_\eta^\oplus Z$. Тогда $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,Z(p))$ неприводим.

2. Если $A=\sum_\eta^\oplus Q$, то $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,Q)$ неприводим.

Эти примеры интересны сами по себе. $E(A)$-модули, рассматриваемые в них, неприводимы, а значит, артиновы и нётеровы. Неприводимость $E(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(A,Z(p))$, где $A=\sum_\eta^\oplus Z$, означает, что кослед группы B в группе A может содержать редуцированную группу без кручения бесконечного ранга, однако $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ будет артиновым, нётеровым (даже неприводимым). Эти примеры играют важную роль в доказательстве артиновости (нётеровости) некоторых подмодулей модуля $\mathrm{Hom}(A,B)$. Так, доказательство нётеровости $E(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(D,Q)$, где D – делимая часть группы A, свелось в конечном счёте к доказательству нётеровости $E(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(A,Q)$, где $A=\sum_\eta^\oplus Q$ из примера 1 (предложение 19). Доказательство артиновости $E(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(T_p,Z(p^k))$, где T_p – ограниченная p-компонента группы A, также свелось к доказательству артиновости $E(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(A,Z(p))$, где $A=\sum_\eta^\oplus Z(p)$ из примера 1 (предложение 8). Это обстоятельство приобретает тем большее значение, что доказательство предложения 8 основано на построении индуцированных последовательностей $E(A)$-модулей и обосновании неприводимости последних. Поэтому оно представляет собой доказательство и нётеровости указанного модуля. Эти примеры используются и в доказательстве теоремы 4.

В связи с доказательством теоремы 4 необходимо сделать следующие замечания.

1. Доказательство артиновости модуля $\mathrm{Hom}(A,Q)$ показывает, что в теореме 4 вместо артиновости модуля $\mathrm{Hom}(A/(T+D),Q)$ можно требовать артиновость модуля $\mathrm{Hom}(A/D,Q)$ или модуля $\mathrm{Hom}(A/T,Q)$.
2. Представим группу A в виде $A=R\oplus D$, где R – редуцированная, D – делимая группы. Тогда $T+D=t(R)\oplus D$ (здесь $t(R)$ – периодическая часть группы R). Имеет место изоморфизм $A/(T+D)\cong R/t(R)$, где на группе без кручения $R/t(R)$ определённым способом может быть задана структура левого $E(A)$-модуля.
3. Теорема 4 в некотором смысле сводит решение проблемы артиновости $E(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(A,B)$ к исследованию артиновости модулей $\mathrm{Hom}(A,Z(p))$, $\mathrm{Hom}(A,Z(p^\infty))$, $\mathrm{Hom}(A,Q)$, где группа A является группой без кручения и по существу рассматривается как модуль над некоторым подкольцом кольца $E(A)$. Действительно, если A – произвольная группа, то в силу теоремы 4 возможно придётся исследовать артиновость $E(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(A/T,Z(p))$. Существует канонический кольцевой гомоморфизм $E(A)\to E(A/T)$. Если он является сюръективным, то подмодули $E(A)$-модуля и $E(A/T)$-модуля совпадают. Однако, вообще, это не так. Так же обстоит дело и с $E(A)$-модулями $\mathrm{Hom}(A/T,Z(p^\infty))$ и $\mathrm{Hom}(A/(T+D),Q)$.

Рассмотрим подробнее строение следа S и коследа $\overline{A}$, а также самих групп A и B, если $\mathrm{Hom}(A,B)$ – артинов $E(A)$-модуль. Для этого будут нужны следующие три леммы.

Лемма 3. Допустим, что делимая группа D содержит одну из групп $Z(p^\infty)$ или Q. Тогда $E(D)$-модуль $\mathrm{Hom}(D,Z(p^\infty))$ не является артиновым.

Лемма 4. Предположим, что делимая часть D группы A содержит либо группу $Z(p^\infty)$, либо группу Q. Тогда $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,Z(p^\infty))$ не является артиновым.

Лемма 5. Если смешанная группа A является p-делимой, то есть $A=pA$, то $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,Z(p^\infty))$ не является артиновым.

Пусть теперь группы A и B обладают тем свойством, что правый $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов. На основании предложений 6 и 7 можно написать

$$A=R_{p_1}\oplus...\oplus Rp_k\oplus D_0\oplus V,$$

где Rp_i ($i=1,...,k$) – редуцированные p-компоненты группы A для некоторых p, относящихся к S, являющиеся ограниченными группами, D_0 – делимая группа без кручения, V – некоторая группа. При этом $t(V)\subseteq K_B(A)\subseteq V$ и $K_B(A)=K_B(V)$ (здесь $t(V)$ – периодическая часть группы V). Разумеется, какие-то слагаемые в записанной сумме могут отсутствовать. Так, ввиду леммы 4 $D_0=0$, если в S имеется группа $Z(p^\infty)$. Для коследа $\overline{A}$ имеем

$$\overline{A}=R_{p_1}\oplus...\oplus Rp_k\oplus D_0\oplus V/K_B(A).$$

Можно проанализировать строение фактор-группы $V/K_B(V)$ в зависимости от строения следа S. Не вникая в детали, обратим внимание лишь на несколько основных моментов. Если S – конечная группа, то

$$\overline{A}=R_{p_1}\oplus...\oplus Rp_k\oplus V/K_B(V),$$

где $V/K_B(V)$ – ограниченная группа. В случае, когда в S присутствует группа Q, имеем

$$\overline{A}=R_{p_1}\oplus...\oplus Rp_k\oplus D_0\oplus V/K_B(V),$$

где $V/K_B(V)=0$, либо $V/K_B(V)$ – группа без кручения. Наконец, если след S содержит группу $Z(p^\infty)$, то

$$\overline{A}=R_{p_1}\oplus...\oplus Rp_k\oplus V/K_B(V),$$

где $V/K_B(V)$ – редуцированная группа без кручения, причём она не делится на p. Действительно, допустим, что $V/K_B(V)$ – p-делимая группа. Обозначив $R=R_{p_1}\oplus...\oplus Rp_k$, найдём, что $E(A)$-модуль $\overline{A}/R$ не имеет кручения и не делится на p как группа. Так же как в леммах 4 и 5 можно показать, что не является артиновым правый $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(\overline{A}/R,Z(p^\infty))$, чего не может быть.

Обратившись к следу S, на основании имеющейся у нас информации можно записать $B=F\oplus E\oplus W$, где F – конечная группа, E – делимая группа конечного ранга, а $\mathrm{Hom}(A,W)=0$. Некоторых из слагаемых F, E, W может не быть. Для следа S получаем $S=F[m]\oplus E$ для какого-то $m\in N$. Дальнейшим поиском более точных соотношений между коследом $\overline{A}$ и следом S мы заниматься не будем. Укажем только, что открыт такой вопрос. Может ли след S содержать группы $Z(p^\infty)$ и Q?

Из теорем 3 и 4 легко вытекает известная теорема 111.3 из книги [3].

Теорема. Кольцо эндоморфизмов $E(A)$ группы A является артиновым слева (или справа) тогда и только тогда, когда $A=B\oplus D$, где B – конечная группа, а D – делимая группа без кручения конечного ранга.

Отметим, что теорема 2 в части эндоартиновости соответствует случаю $E(B)$-модуля $\mathrm{Hom}(Z,B)$ в теореме 3. Теорема 4 а также результаты заметки [4] вызывают такой вопрос. Для каких групп без кручения A $E(A)$-модули $\mathrm{Hom}(A,Q)$, $\mathrm{Hom}(A,Z(p))$ и $\mathrm{Hom}(A,Z(p^\infty))$являются: неприводимыми, артиновыми, нётеровыми?

Приведём несколько следствий теоремы 4.

Следствие 8. Пусть A – произвольная, B – редуцированная группы. $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов тогда и только тогда, когда след S есть конечная группа; для каждого p, относящегося к группе B, редуцированная p-компонента группы A ограничена; $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A/T,Z(p))$ артинов для всякого p, относящегося к следу S.

Следствие 9. Если A и B – периодические группы, то $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов в том и только в том случае, когда след S — конечная группа и для каждого p, относящегося к группе B, редуцированная p-компонента группы A ограничена.

Следствие 10. Пусть A и B – делимые группы. $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A,B)$ артинов тогда и только тогда, когда $\overline{A}$ и S – делимые группы без кручения и ранг группы S конечен.

Из теорем 3 и 4 можно вывести условия одновременной артиновости $E(A)$-модуля и $E(B)$-модуля $\mathrm{Hom}(A,B)$.

Следствие 11. Пусть A – произвольная, B – редуцированная группы. Группа $\mathrm{Hom}(A,B)$ является артиновым $E(A)$-модулем и одновременно артиновым $E(B)$-модулем тогда и только тогда, когда след S – конечная группа; для любого p, относящегося к следу S, редуцированная p-компонента группы B ограничена; для каждого p, относящегося к группе B, редуцированная p-компонента группы A ограничена; $\overline{A}=H\oplus G$, где H – конечная группа, G – редуцированная группа без кручения и для любого р, относящегося к следу S, $r_p(G)<\infty$; $E(A)$-модуль $\mathrm{Hom}(A/T,Z(p))$ артинов для каждого p, относящегося к следу S.

Следствие 12. Пусть A и B – периодические группы. Группа $\mathrm{Hom}(A,B)$ является артиновым $E(A)$-модулем и одновременно артиновым $E(B)$-модулем тогда и только тогда, когда группы $\overline{A}$ и S конечны; для каждого p, относящегося к группе S, редуцированная p-компонента группы B ограничена; для любого p, относящегося к группе B, редуцированная p-компонента группы A ограничена.

Следствие 13. Пусть A и B – делимые группы. Группа $\mathrm{Hom}(A,B)$ является артиновым $E(A)$-модулем и артиновым $E(B)$-модулем тогда и только тогда, когда группы $\overline{A}$ и S являются делимыми группами без кручения конечного ранга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крылов П.А., Подберезина Е.И. Группа $\mathrm{Hom}(A,B)$ как артинов $E(B)$-модуль // Абелевы группы и модули. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1996. – Вып. 13–14. – С. 170–184.
2. Подберезина Е.И. Об артиновости $E(A)$-модуля $\mathrm{Hom}(A,B)$ // Абелевы группы и модули. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1996. – Вып. 13–14. – С. 190–199.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. – М.: Мир, 1977. – Т. 2. – 416 с.
4. Крылов П.А., Подберезина Е.И. Строение смешанных абелевых групп с нетеровыми кольцами эндоморфизмов // Абелевы группы и модули. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1994. – Вып. 11–12. – С. 121–129.